Définir le nombre dérivé sans limite ?

La notion de limite n'est plus étudiée en classe de Première, ni en Terminale ES et STMG. Pourtant la définition officielle du nombre dérivé d'une fonction s'appuie sur la limite du coefficient directeur des sécantes à la courbe en un point.
La notion de limite est-elle incontournable ?

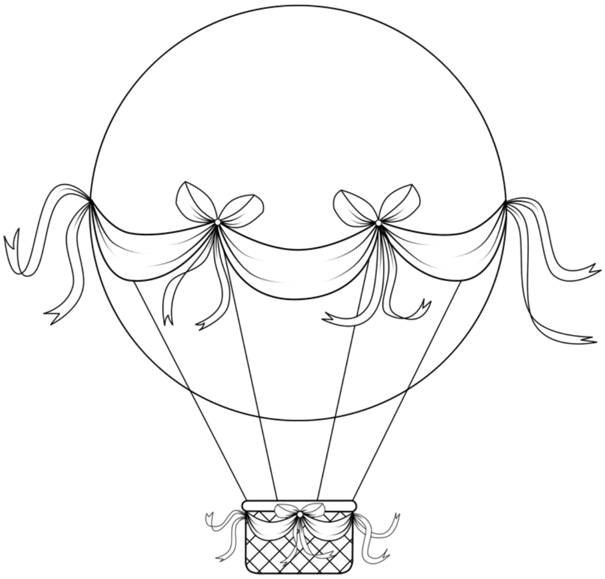
Quelles sont les autres approches du nombre dérivé ?

Le nombre dérivé est parfois défini par la tangente et la tangente par le nombre dérivé.

Peut-on définir la tangente autrement ?

Et surtout, comment mettre les élèves dans une attitude de recherche sur cette notion ?

Et comment gérer les recherches des élèves si elles ne conduisent pas à la définition voulue ?



Le groupe Parcours d'Etude et de Recherche en 1$^{\text{ère}}$ ES et 1$^{\text{ère}}$ STMG de l'IREM de Rennes vous propose des éléments de réponse ainsi qu'un voyage dans le temps sur la notion de tangente.

Parcours d'étude et de recherche sur le nombre dérivé.

Comment évaluer la vitesse avec laquelle une variable évolue par rapport à une autre ?

Activité 1 Lièvre et tortue

a) Comparer des vitesses sur un graphique de fonctions affines par morceaux.

b) Calculer la vitesse pour une fonction affine.

Activité 1 Le meilleur prix

a) Comparer des coûts marginaux sur un graphique de fonctions affines par morceaux.

b) Calculer le coût marginal pour une fonction affine.

Activité 2 Excès de vitesse

a) Distinguer vitesse moyenne et vitesse instantanée.

Qu'est-ce que la vitesse instantanée ?

b) Estimer graphiquement une vitesse.

c) Lien entre vitesse instantanée et tangente.

Qu'est-ce que la tangente à une courbe en un point ?

d) Conclusion : (Zoom)

Définition de la tangente. (Eventuellement point double)

Activité 6 Limite et $f'(x_A)$

Démontrer que :

$$f'(x_A) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_A + h) - f(x_A)}{h}$$

d) Conclusion : limite de sécantes

Définition de la tangente.

Activité 3 Dérivée du carré

a) Définir l'approximation affine.

Activité 3

b) Déduire le nombre dérivé de l'approximation affine

Activité 3

c) Equation de la tangente

Activité 4

Calculer des nombres dérivés

Activité 5

Trouver et démontrer des formules de nombres dérivés.

Activité 7

Déterminer des tangentes.

Activité 8

Déterminer des vitesses instantanées, des coûts marginaux, des débits...

Qu'est-ce que le nombre dérivé ?

L'important est de conduire les élèves à effectuer une recherche sur les questions marquées en rouge. La question en gras peut être donnée au départ, mais elle ne prendra du sens qu'au travers des activités. En particulier, l'expression « vitesse instantanée » n'y figure pas pour que l'activité 2a) soit l'occasion pour les élèves d'exprimer la distinction entre la vitesse moyenne et la vitesse instantanée.
La recherche des élèves peut les conduire sur différentes pistes liées aux différentes définitions de la vitesse, de la tangente ou du nombre dérivé ; l'enjeu est d'exploiter cette richesse, ce qui peut conduire à des variantes pour certains groupes (flèche en pointillée).

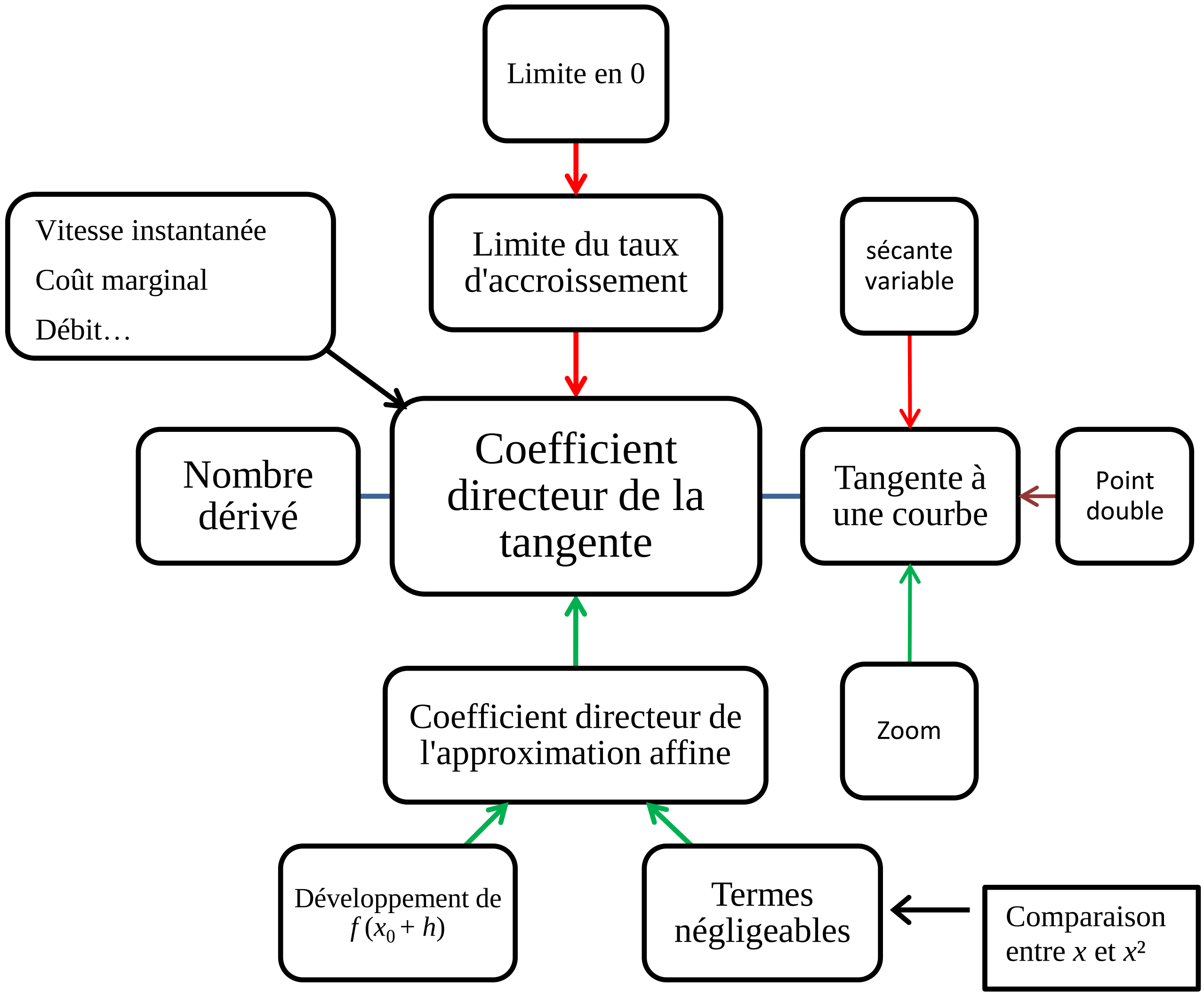
En particulier, l'approximation affine est celle qui traduit le mieux l'idée du zoom et de tangente mais la notion de limite est celle qui traduit le mieux l'idée de vitesse instantanée.

Ainsi, le titre de l'atelier LA DERIVEE SANS LIMITE devrait être nuancé, la définition par la limite n'est qu'une des approches possibles. Le programme de Première précédent celui de 2011 comportait ces différentes approches, les oublier serait un appauvrissement de la notion.

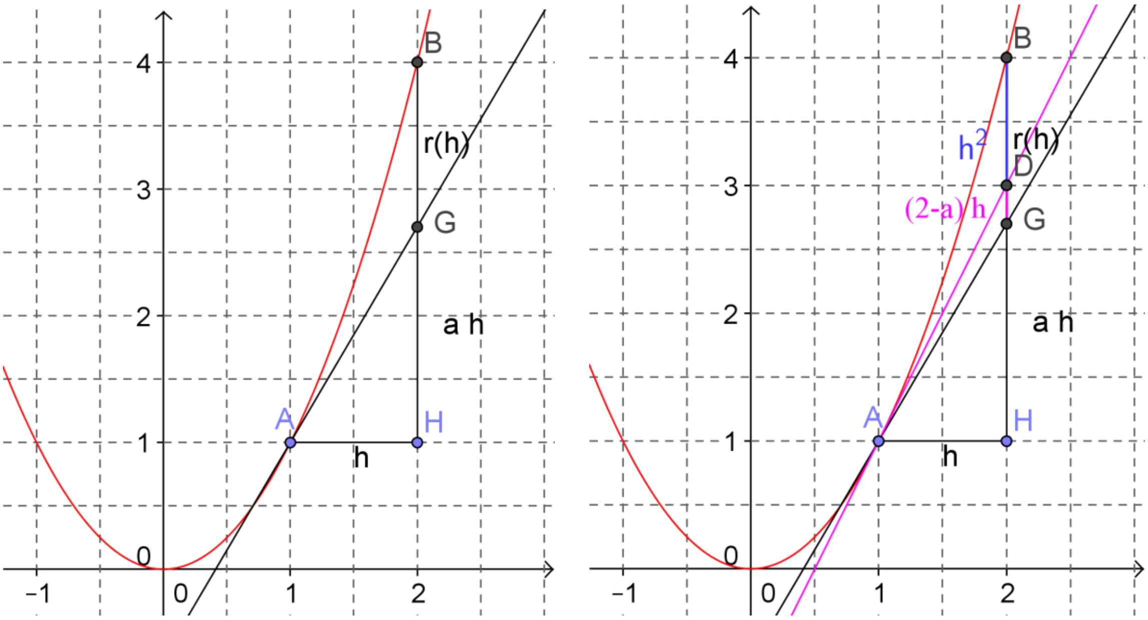
Toutes les pistes méritent d'être exploitées. L'idée de point unique peut conduire à montrer que cette définition est mise en défaut par les parallèles à l'axe d'une parabole, et si on ajoute la caractéristique d'être à l'extérieur de la courbe (définition des grecs classiques), on trouve des contre-exemples avec les cubiques, ceci fait réfléchir sur la notion, même si cette définition n'est pas retenue.

De même, l'idée de point double entre la courbe et une droite de coefficient directeur *a* peut conduire à des calculs intéressants notamment sur les trinômes, mais la factorisation devient délicate pour des polynômes de degré plus élevé… à moins d'utiliser des outils adaptés comme le développement de $f(x_0 + h) - f(x_0) - a\,h$ et la factorisation par *h*. On retombe alors sur l'approximation affine.

On peut voir sur ce schéma des notions qui peuvent conduire à définir le coefficient directeur de la tangente ou le nombre dérivé.



Graphiques qui montrent que la courbe « s'aplatit » sur une droite de coefficient directeur *a* si le reste $r(h)$ devient négligeable par rapport à $a\,h$.



1er graphique :

$(1+h)^2 = 1 + 2\,h + h^2$ et h^2 est négligeable devant $2\,h$.

2ème graphique A partir d'une droite de coefficient directeur *a* passant par A :

$r(h) = f(1+h) - a\,(1 + h - 1) - 1 = 1 + 2\,h + h^2 - a\,h - 1 = (2 - a)\,h + h^2$ qui ne deviendra négligeable devant h que si $a = 2$. Sinon, la courbe s'aplatit sur (AD) et non pas sur (AG).

<u>La tangente en Physique</u> : un calcul exact pour une parabole.

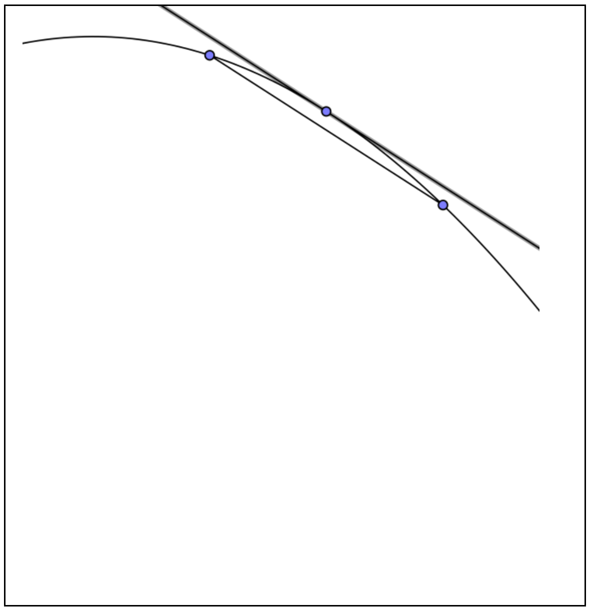
Soit $f(t) = a\,t^2 + b\,t + c$.

Le coefficient directeur de la tangente est :

$$\frac{f(t+\Delta t) - f(t-\Delta t)}{2\Delta t} =$$

$$\frac{a(t+\Delta t)^2 + b(t+\Delta t) + c - a(t-\Delta t)^2 - b(t-\Delta t) - c}{2\Delta t}$$

$$= \frac{a(2t)(2\Delta t) + 2b\Delta t}{2\Delta t} = 2at + b$$



Contre-exemple : la fonction valeur absolue.